Équations différentielles du second ordre à coefficients constants avec second membre $y'' + by' + cy = q(x)$

Les solutions de l'équation $y'' + by' + cy = q(x)$ (1), avec $q(x)$ fonctions de x, sont les fonctions $y = y_g + y_0, k \in \mathbb{R}$ où y_g sont les solutions de l'équation correspondante sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ (2) et y_0 est une solution particulière quelconque de l'équation (1) qu'il s'agit de trouver par la méthodes expliquée ☞ ici.

Exemple

Énoncé

Trouver les solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = e^x$ (1)

Réponse

- Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$, solutions : $\alpha = 2$ et $\beta = 1$
- Solution de $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2) : $y_g = k_1 e^{2x} + k_2 e^x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
- $u' - 2u = e^x$ donne p.ex. $u(x) = -e^x$
  $v' - v = -e^x$ donne p.ex. $v = y_0 = -xe^x$
- D'où la solution générale de (1) :$y = y_g + y_0 = k_1 e^{2x} + k_2 e^x - xe^x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

☞ Exercices

Exercices :

Trouver toutes les solutions de :

$$y'' - 4y' + 3y = 1 \tag{1}$$

$$y'' - 4y = 5 \tag{2}$$

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x} \tag{3}$$

$$y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2) \tag{4}$$

$$y'' - y = 4xe^x \tag{5}$$

$$y'' - y = sin^2 x \tag{6}$$

$$y'' - y = (1 + e^{-x})^{-2} \tag{7}$$

$$y'' + 9y = xcosx \tag{8}$$

☞ Réponses

☞ Retour

Réponses :

$$
\begin{array}{ll}
(1) & y = k_1 e^x + k_2 e^{3x} + \dfrac{1}{3}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(2) & y = k_1 + k_2 e^{4x} + \dfrac{5x}{4}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(3) & y = k_1 e^{3x} + k_2 x e^{3x} + e^{2x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(4) & y = k_1 e^x + k_2 e^{-2x} + x^2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(5) & y = k_1 e^x + k_2 e^{-x} + e^x(x^2 - x), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(6) & y = k_1 e^x + k_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10} cos2x, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(7) & y = k_1 e^x + k_2 e^{-x} - 1 + e^{-x} ln(1 + e^x), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(8) & y = k_1 cos3x + k_2 sin3x + \dfrac{1}{8} xcosx + \dfrac{1}{32} sinx, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Remarque : Dans le dernier cas, le polynôme caractéristique possède les racines $\alpha = 3i$ et $\beta = -3i$, en remplaçant $xcosx$ par $x\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, on arrive à faire les intégrations nécessaires pour trouver la solution particulière $\frac{x}{8}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{1}{32}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = \frac{1}{8}xcosx + \frac{1}{32}sinx$ etc..

☞ Retour

Méthode pour trouver une solution particulière de $y'' + by' + cy = q(x)$:

- On cherche les solutions α et β (éventuellement doubles ou complexes !) de l'équation caractéristique : $r^2 + br + c = 0$

- On cherche une solution u de $u' - \alpha u = g(x)$ (voir équations différentielles du premier ordre)

- On trouve ensuite la solution particulière y_0 recherchée comme solution particulière de l'équation différentielle du premier ordre $v' - \beta v = u(x)$

☞ Retour