# Équations différentielles du second ordre à coefficients constants sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$

Méthode : On écrit l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$. Trois cas sont possibles :
1) $b^2 - 4ac > 0$ ; il y a deux solutions $r_1$ et $r_2$ de l'équation caractéristique
Alors la solution générale de l'équation différentielle est donnée par :
$y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
2) $b^2 - 4ac = 0$ ; il y a une solution $r$ de l'équation caractéristique
Alors la solution générale de l'équation différentielle est donnée par :
$y = k_1 e^{rx} + k_2 x e^{rx}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
3) $b^2 - 4ac < 0$ ; Alors la solution générale de l'équation différentielle est donnée par :
$y = k_1 e^{\alpha x} cos(\beta x) + k_2 e^{\alpha x} sin(\beta x)$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ , $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$,$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

## Exemple

### Énoncé

Trouver la solution de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ avec $y(\frac{\pi}{4}) = 2$ (a) et $y'(\frac{\pi}{4}) = -2$ (b)

### Réponse

- Équation caractéristique : $r^2 + 2r + 2 = 0$, $2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$
- Solution générale : $y = k_1 e^{-x} cos(x) + k_2 e^{-x} sin(x)$ (1)
- Pour utiliser (b), il nous faut la dérivée de $y$ :
  $y' = k_1 e^{-x}(-cos - sinx) + k_2 e^{-x}(-sinx + cosx)$ (2)
- En introduisant (a) et (b) dans (1) et (2), on trouve : $k_1 = k_2 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}$
- $y = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} (cosxe^{-x} + sinxe^{-x})$

☞ Exercices

**Exercices :**

Trouver toutes les solutions de :

$$y'' + 2y' - 15y = 0 \tag{1}$$

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \tag{2}$$

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \tag{3}$$

$$y'' + 25y = 0 \tag{4}$$

☞ Réponses

☞ Retour

**Réponses :**

$$
\begin{array}{ll}
(1) & y = k_1 e^{3x} + k_2 e^{-5x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(2) & y = k_1 e^{-3x} + k_2 x e^{-3x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(3) & y = e^{2x}(k_1 cos 3x + k_2 sin 3x), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\
(4) & y = k_1 cos 5x + k_2 sin 5x, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

☞ Retour