Équations différentielles du second ordre qui se ramènent au 1er ordre $y'' = f(y, y')$: Cas où il manque x

Les solutions de l'équation $y'' = f(y, y')$, sont obtenues
1) En posant $y' = z$, donc $y'' = z' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z^{(1)}z$, , où $z^{(1)}$ désigne la première dérivée de z par rapport à y
2) En trouvant une solution de l'équation de 1er ordre $z^{(1)}z = f(y, z)$ donnant $y' = z$ en fonction de y , puis
3) en résolvant cette équation du premier ordre pour trouver les solutions donnant y en fonction de x

Exemple

Énoncé

Trouver la solution de l'équation $y'' = (y')^3 + y'$

Réponse

- Posons $z = y'$, puis $y'' = z' = z^{(1)}z$, avec $z^{(1)} = \frac{dz}{dy}$ et substituons :
- $zz^{(1)} = z^3 + z$; $\frac{z^{(1)}}{z^2+1} = 1$
- $\int \frac{dz}{z^2+1} = \int 1dy$; $tan^{-1}(z) = y + k_1, k_1 \in \mathbb{R}$
- $y' = z = tan(y + k_1)$, (solution triviale : $z = 0$)
- $\int \frac{dy}{tan(y+k_1)} = \int dx$; $y = sin^{-1}(k_2e^x) + k_1, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, (solution triviale : $y = k, k \in \mathbb{R}$)

☞ Exercices

Exercices :

Trouver toutes les solutions de :

$$y'' + (y')^2 y = 0 \tag{1}$$

$$yy'' = 2(y')^2 - 2y' \tag{2}$$

$$yy'' - (y')^2 = y^2 - lny \tag{3}$$

☞ Réponses

☞ Retour

Réponses :

(Les solutions triviales sont négligées)

(1) $z = \dfrac{2}{y^2 - 2k_1}; \quad \dfrac{y^3}{3} - 2k_1 y = 2x + k_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

(2) $z = k_1^2 y^2 + 1; \quad k_1 y = tan(k_1 x + k_2), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

(3) $z^2 = y^2(ln^2 y + k_1); \quad , ln(lny + \sqrt{ln^2 y + k_1}) = \pm x + ln(k_2) \quad k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$

☞ Retour