Équations différentielles du second ordre qui se ramènent au 1er ordre $y'' = f(x, y')$: Cas où il manque y

Les solutions de l'équation $y'' = f(x, y')$, sont obtenues
1) En posant $y' = z$, donc $z' = f(x, z)$, ce qui est une équation du 1er ordre
2) En résolvant l'équation de 1er ordre $z' = f(x, z)$ pour trouver toutes les solutions pour z
3) $y = \int z dx$ donne toutes les solutions pour y

Exemple

Énoncé

Trouver la solution de l'équation $xy'' + 2y' + x = 1$, avec $y(1) = 2$ et $y'(1) = 1$

Réponse

- Posons $z = y'$, l'équation devient : $xz' + 2z + x = 1$
- C'est une équation linéaire du 1er ordre, sa résolution donne :$z = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$, $k \in \mathbb{R}$
- Comme $z(1) = 1$, nous obtenons $k = \frac{5}{6}$ et donc $z = \frac{5}{6x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$
- Comme $y' = z$, nous obtenons $y = \int z dx = \int (\frac{5}{6x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}) dx = k - \frac{5}{6x} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}$, $k \in \mathbb{R}$
- Comme $y(1) = 2$, nous obtenons : $k = \frac{5}{2}$, et ainsi : $y = \frac{5}{2} - \frac{5}{6x} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}$

☞ Exercices

Exercices :

Trouver toutes les solutions de :

$$y'' + (y')^2 = 0 \tag{1}$$

$$(x^2+1)y'' + xy' = 0 \tag{2}$$

$$2y'' - (y')^2 + 4 = 0 \tag{3}$$

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{1}{x^3} = 0 \tag{4}$$

$$xy'' - y' = 3x^2 \tag{5}$$

☞ Réponses

☞ Retour

Réponses :

(1) $$y' = \frac{1}{x+k_1}; \quad y = ln|x+k_1| + k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

(2) $$y' = k_1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad y = k_1 ln(x + \sqrt{x^2+1}) + k_2 \quad , k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

(3) $$y' = 2\frac{1+k_1e^{2x}}{1-k_1e^{2x}} = 2(1 + \frac{2k_1e^{2x}}{1+k_1e^{2x}}), \quad y = 2(x - ln|1-k_1e^{2x}| + k_2), k1, k2 \in \mathbb{R}$$

(4) $$y' = \frac{1}{2x^2} + \frac{k_1}{x^4}; \quad y = -\frac{1}{2x} - \frac{k_1}{3x^3} + k_2 \quad , k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

(5) $$y' = k_1(x+3x^2); \quad y = k_1(\frac{x^2}{2} + x^3) + k_2 \quad , k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

☞ Retour