Équations différentielles $y' = f(x, y)$, avec $f(x, y) = f(kx, ky), \forall k \in \mathbb{R}$ (Homogènes)

Les solutions de l'équation $y' = f(x, y)$, avec $f(x, y) = f(kx, ky), \forall k \in \mathbb{R}$, sont obtenues
1) En substituant $y = zx$, donc $y' = z + z'x$ ou encore $dy = zdx + xdz$
2) En intégrant ensuite l'équation aux variables séparables obtenue

Exemple

Énoncé

Trouver toutes les solutions de l'équation $x^2y' - y^2 = 0$

Réponse

- Contrôlons, que l'équation est homogène : $y' = \frac{y^2}{x^2} = \frac{(ky)^2}{(kx)^2}, \forall k \in \mathbb{R}$
- La substitution 1) dans $x^2dy - y^2dx = 0$ donne : $x^2(z^2 - x)dx = x^3dz$ (équation à variables séparables)
- $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z(z-1)}dx$
- En posant $\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{z(z-1)}$, on trouve $A = -1$ et $B = 1$, donc
- $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z-1}$, ce qui donne finalement :
- $kx = \frac{z-1}{z}$, $k \in \mathbb{R}$, puis en resubstituant $z = \frac{y}{x}$:
- $y - x = kxy$, $k \in \mathbb{R}$

☞ Exercices

Exercices :

Trouver toutes les solutions de :

$$(x+2y)dx+(2x+3y)dy=0 \tag{1}$$

$$2xdy-2ydx=\sqrt{x^2+4y^2}dx \tag{2}$$

$$y^2-x^2+xyy'=0 \tag{3}$$

$$(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0 \tag{4}$$

$$y'=\frac{-2x+5y}{2x+y} \tag{5}$$

Trouver la solution particulière de :

$$xdy+2ydx=0; y(2)=1 \tag{6}$$

$$(x^2+y^2)dx+xydy=0; y(1)=-1 \tag{7}$$

$$x^2y'-(y^2+xy)=0; y(1)=1 \tag{8}$$

☞ Réponses

☞ Retour

Réponses :

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x^2+4xy+3y^2=k \quad ,k\in\mathbb{R} \\
(2) & 1+4ky-k^2x^2=0 \quad ,k\in\mathbb{R} \\
(3) & 2x^2y^2=x^4+k \quad ,k\in\mathbb{R} \\
(4) & x^4+4xy^3=k \quad ,k\in\mathbb{R} \\
(5) & (y-x)^3=k(y-x)^4 \quad ,k\in\mathbb{R}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x^2y=4 \\
(2) & x^4+2x^2y^2=3 \\
(3) & x=e^{1-\frac{x}{y}}
\end{array}
$$

☞ Retour