Équations différentielles
$a_2(x)b_1(y)y' - a_1(x)b_2(y) = 0$
(Variables séparées)

Les solutions de l'équation $a_2(x)b_1(y)y' - a_1(x)b_2(y) = 0$, pour $a_2(x) \neq 0$, $b_2(y) \neq 0$, sont obtenues
1) En multipliant formellement par $\frac{dx}{a_2(x)b_2(y)}$, ce qui mène à : $\frac{b_1(y)}{b_2(y)}dy = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx$
2) En intègrant ensuite suivant :$\int \frac{b_1(y)}{b_2(y)}dy = \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx$

Exemple

Énoncé

Trouver toutes les solutions de l'équation $(1 + x^3)y' - x^2y = 0$

Réponse

- Multiplions par : $\frac{1}{y(1+x^3)}dx$ (Facteur intégrant)
- $\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}dx$
- $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2}{1+x^3}dx$
- $lny = \frac{1}{3}ln(1 + x^3) + k$, $k \in \mathbb{R}$
- $y = k(1 + x^3)^{\frac{1}{3}}$, $k \in \mathbb{R}$

On pourra d'ailleurs vérifier cette solution en appliquant la technique des équations différentielles linéaires d'ordre 1 sans second membre !

☞ Exercices

Exercices :

Trouver toutes les solutions de :

$$x(y-3)y' = 4y \tag{1}$$

$$x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0 \tag{2}$$

$$xyy' = (y+1)(1-x) \tag{3}$$

$$(1+2y)dx - (4-x)dy = 0 \tag{4}$$

$$y' = 1 + \frac{1}{y^2} \tag{5}$$

$$1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 = y' \tag{6}$$

☞ Réponses

☞ Retour

Réponses :

(1) $x^4y^3 = ke^y, \quad ,k \in \mathbb{R} \quad ; facteur : \quad \dfrac{dx}{xy}$

(2) $(x+1)^2 + (y-1)^2 + 2ln(x-1)(y+1) = k \quad ,k \in \mathbb{R} \quad ; facteur : \quad \dfrac{1}{(y+1)(x-1)}$

(3) $y + x = lnx(y+1) + k; facteur : \quad \dfrac{dx}{x(y+1)}$

(4) $(x-4)^2(1+2y) = k, k \in \mathbb{R}; facteur : \quad \dfrac{1}{(1+2y)(4-x)}$

(5) $y - \dfrac{1}{tany} = x + k, k \in \mathbb{R}; facteur : \quad \dfrac{dx}{y^2+1}$

(6) $tan^-1(y) = x + \dfrac{x^3}{3} + k; facteur : \quad \dfrac{dx}{y^2+1}$

☞ Retour