Équations différentielles $a(x)y' - b(x)y = c(x)$ Méthode par la recherche d'une solution particulière

Les solutions de l'équation $a(x)y' - b(x)y = c(x)$, avec $a(x), b(x)$ et $c(x)$ fonctions de x, sont les fonctions $y = ke^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} + y_0, k \in \mathbb{R}$ où y_0 est une solution particulière quelconque de cette équation qu'il s'agit de trouver par une des méthodes expliquées ☞ ici.

Exemple

Énoncé

Trouver toutes les solutions de l'équation $y' - y = x - 1$

Réponse

On voit tout de suite que $y_0 = -x$ est une solution particulière.
Les solutions de l'équation $y' - y = x - 1$ sont les fonctions $y = ke^{\int 1dx} - x = ke^x - x, k \in \mathbb{R}$

Exercices

Trouver toutes les solutions de :

$$2xy' - y = x + 1 \tag{1}$$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}y + \frac{2}{1+x^2} \tag{2}$$

$$cos^2xsinxy' = -cos^3xy + 1 \tag{3}$$

☞ Réponses

Réponses :

$2xy' - y = x + 1$ (1)

L'équation $2xy' - y = 0$ possède dans $\mathbb{R}_+^*$ la solution $k\sqrt{x}$, $k \in \mathbb{R}$
Cherchons une solution $y_0(x) = k(x)\sqrt{x}$ de l'équation (1) :
On trouve $y_0'(x) = k(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} + k'(x)\sqrt{x}$
En introduisant dans (1), il vient : $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$, d'où :
$k(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + c$, $c \in \mathbb{R}$ et enfin :
$y = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + c)\sqrt{x} = x - 1 + k\sqrt{x}$

$y' = \frac{2x}{1+x^2}y + \frac{2}{1+x^2}$ (2)

L'équation $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$ possède dans $\mathbb{R}$ la solution $k(1+x^2)$, $k \in \mathbb{R}$
Cherchons une solution $y_0(x) = k(x)(1+x^2)$ de l'équation (2) :
On trouve $y_0'(x) = k(x)2x + k'(x)(1+x^2)$
En introduisant dans (2), il vient : $k'(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$, d'où :
$k(x) = \int \frac{2}{(1+x^2)^2}$
$k(x) = 2\int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}$
$k(x) = 2tan^{-1}x + \frac{x}{1+x^2} - tan^{-1}x + c$, $c \in \mathbb{R}$ (intégration par parties)
$k(x) = tan^{-1}x + \frac{x}{1+x^2}$, et enfin :
$y = (1+x^2)tan^{-1}x + x + k(1+x^2)$

$cos^2xsinxy' = -cos^3xy + 1$ (3)

L'équation $cos^2xsinxy' + cos^3xy = 0$ possède dans $\mathbb{R} - \{\alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}\}$ la solution $k\frac{1}{sinx}$, $k \in \mathbb{R}$
Cherchons une solution $y_0(x) = k(x)\frac{1}{sinx}$ de l'équation (3) :
On trouve $y_0'(x) = -k(x)\frac{cosx}{sin^2x} + k'(x)\frac{1}{sinx}$
En introduisant dans (3), il vient : $k'(x) = \frac{1}{cos^2x}$, d'où :
$k(x) = tanx + c$, $c \in \mathbb{R}$ et enfin :
$y = tanx\frac{1}{sinx} + c\frac{1}{sinx} = \frac{1}{cosx} + c\frac{1}{sinx}$,$c \in \mathbb{R}$

☞ Retour

Méthodes pour trouver une solution particulière de $a(x)y' - b(x)y = c(x)$:

- *Méthode heuristique (Trial and error)*
  Exemple : Soit l'équation y'-3y=2x-1. On essaie, si une solution particulière ne pourrait pas être de la forme $y_0 = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$:
  Mais alors :

$$\begin{aligned}
&y_0' - 3y_0 = 2x - 1\\
&a - 3(ax + b) = 2x - 1\\
&-3ax + (a - 3b) = 2x - 1\\
&a = -\frac{2}{3}; b = \frac{1}{9}\\
&y_0 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

- *Méthode de Lagrange*
  Méthode : Si la solution générale de l'équation $a(x)y' + b(x)y = 0$ est de la forme $ks(x)$ avec $k \in \mathbb{R}, s(x)$ fonction de x, alors une solution particulière de l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sera de la forme $k(x)s(x)$, c.à.d. que la constante k est remplacée par une fonction $k(x)$:
  Exemple : Soit l'équation $x^2y' + y = xe^{\frac{1}{x}}$. En résolvant $x^2y' + y = 0$, on obtient $y = ke^{\frac{1}{x}} = ks(x)$ avec $s(x) = e^{\frac{1}{x}}$
  Mais alors :

$$\begin{aligned}
&y_0 = k(x)s(x)\\
&y_0 = k(x)e^{\frac{1}{x}}\\
&x^2y_0' + y_0 = xe^{\frac{1}{x}}\\
&x^2(k'(x)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}k(x)e^{\frac{1}{x}}) + k(x)e^{\frac{1}{x}} = xe^{\frac{1}{x}}\\
&x^2k'(x)e^{\frac{1}{x}} = xe^{\frac{1}{x}}\\
&x^2k'(x) = x\\
&k'(x) = \frac{1}{x}\\
&k(x) = ln|x| + c, c \in \mathbb{R}.\\
&Choisissons \quad c = 0\\
&y_0 = ln|x|e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

☞ Retour