Équations différentielles $y' - ay = b$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$

Les solutions de l'équation $y' - ay = b$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$

Exemple

Énoncé

Trouver toutes les solutions de l'équation $y' - 2y - 1 = 0$, puis la solution f telle que f(1)=3.

Réponse

L'équation $y' - 2y - 1 = 0$ s'écrit $y' - 2y = 1$ et possède ainsi les solutions $f(x) = y = ke^{2x} - \frac{1}{2}, k \in \mathbb{R}$
$3 = ke^{2 \cdot 1} - \frac{1}{2}$ fournit $k = \frac{7}{2}e^{-2}$, donc la solution demandée est $f(x) = \frac{7}{2}e^{2x-2} - \frac{1}{2}$.

Exercices

Trouver toutes les solutions de :

$$y' = 3y - 1 \tag{1}$$

$$y = -3y' + 2 \tag{2}$$

$$2y' - 5y + 3 = 0 \tag{3}$$

Soit $y = f(x)$. Trouver chaque fois la solution particulière de :

$$3y' - y = 3; \quad f(2) = -1 \tag{4}$$

$$2y' = y - 5; \quad f(0) = 2 \tag{5}$$

$$y - 4y' - 3 = 0; \quad f(-1) = 1 \tag{6}$$

☞ Réponses

Réponses :

$$(1) \qquad y = ke^{3x} + \frac{1}{3}, \quad k \in \mathbb{R}$$
$$(2) \qquad y = ke^{\frac{5}{2}x} + \frac{3}{5}, \quad k \in \mathbb{R}$$
$$(3) \qquad y = ke^{-\frac{1}{3}x} + 2, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(4) \qquad y = 2e^{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}} - 3$$
$$(5) \qquad y = -3e^{\frac{1}{2}x} + 5$$
$$(6) \qquad y = -2e^{\frac{1}{4}(x+1)} + 3$$

☞ Retour